Secuencias de actividades sobre derivada desde una trayectoria de aprendizaje*

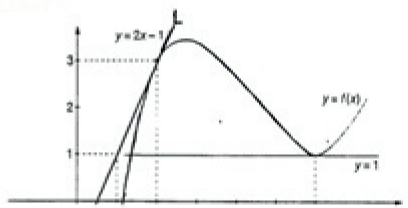
Gloria Sánchez-Matamoros
Universidad de Sevilla
Ceneida Fernández Verdú
Universidad de Alicante

Una de las dificultades en el aprendizaje de la derivada es que los significados analítico o gráfico que los estudiantes construyen no están relacionados. Para lograr esta coordinación, proponemos una planificación de la enseñanza en primero de bachillerato basada en la idea de trayectoria de aprendizaje. Esta idea conlleva un cambio de perspectiva en la actividad del profesor; las tareas se secuencian no desde la lógica de la matemática, sino desde la del aprendizaje de los estudiantes.

PALABRAS CLAVE
- DERIVADA
- TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE
- SECUENCIA DE ACTIVIDADES
- BACHILLERATO

Los conceptos de *derivada* e *integral* son claves para el aprendizaje del cálculo en bachillerato. Un significado intuitivo de la derivada es la medida de velocidad de cambio de una función que se apoya sobre la idea de razón (tasa de variación). La aproximación a la derivada puede ser desde una perspectiva gráfica o analítico-numérica. Desde la gráfica, la derivada está vinculada a la pendiente de la tangente a la curva en un punto $x = a$, y desde la analítica, como límite del cociente incremental. Una de las dificultades en el aprendizaje de este concepto es que los estudiantes pueden construir la idea de derivada como límite del cociente incremental o como pendiente de la recta tangente pero, en muchas ocasiones, no relacionan estos dos significados.

El cuadro 1 muestra la resolución de un alumno de primero de bachillerato a dos problemas de derivadas. Este alumno realiza correctamente los cálculos de la tasa de variación media en el primer problema (modo analítico). Sin embargo, necesita realizar cálculos para resolver el segundo problema (modo gráfico), lo que pone de manifiesto la desvinculación entre ambos significados de la derivada. Una posible causa de esta desconexión es el énfasis en el modo de representación

<table>
<tr>
<td>*Calcula la tasa de variación media de* $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ *en el intervalo [1, 2]. ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de f(x) en el punto (1, f(1))?*</td>
<td colspan="2">PROCESO DE RESOLUCIÓN
$TVM[1,2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\frac{5}{4}-\frac{4}{3}}{2-1} = \frac{-1/12}{1} = -\frac{1}{12}$
$f(2) = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$ $\quad \frac{5}{4}-\frac{4}{3} = \frac{15-16}{12} = \frac{-1}{12}$
$f(1) = \frac{1+3}{1+2} = \frac{4}{3}$
$P\left(1, \frac{4}{3}\right) \quad Q\left(2, \frac{5}{4}\right)$
$\vec{PQ} = \left(2-1, \frac{5}{4}-\frac{4}{3}\right) = \left(1, -\frac{1}{12}\right)$
$m = \frac{-\frac{1}{12}}{1} = -\frac{1}{12}$</td>
</tr>
<tr>
<td>*Suponer que la línea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (2,3) como aparece en la figura. Sin realizar ningún cálculo, encontrar f(2) y f´(2).*

</td>
<td>PROCESO DE RESOLUCIÓN (
$f(x) = 2x-1$
$f(2) = 2\cdot 2-1 = \underline{3}$
$f'(2) = \underline{2}$</td>
<td>***I:*** *para encontrar el valor de f(2) lo haces sustituyendo en la recta y =2x-1. ¿Sabrías encontrarlo de otra forma?*
E1: *si, por el gráfico para x =2, la "y" vale 3.*
I: *¿f ´(2) =2?*
E1: *he derivado "2x-1" y me da 2*
I: *en la tarea te piden f ´(2), considerando f(x) esta curva, de la que desconoces la expresión analítica. ¿Sabrías aplicar otro tipo de razonamiento?*
E1: *no, no sé.*</td>
</tr>
</table>

Cuadro 1. Respuesta de un estudiante de primero de bachillerato a dos problemas de derivadas

analítico que tiene muchas veces la enseñanza (Habre y Abboud, 2006). Esto subraya la importancia de la coordinación necesaria entre los diferentes modos de representación para que los estudiantes puedan llegar a comprender la derivada. Para conseguirlo, proponemos una forma de introducir la derivada en primero de bachillerato que considera la idea de trayectoria de aprendizaje como referencia para tomar decisiones.

UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DERIVADA

Una trayectoria de aprendizaje es un camino hipotético por el que los aprendices pueden progresar en su aprendizaje (Clements y Saraman, 2004) y tiene tres componentes:

- Un objetivo de aprendizaje: la comprensión del concepto de derivada apoyada en la coordinación de diferentes modos de representación.
- Un conjunto de tareas.
- La descripción de un proceso de aprendizaje: niveles de desarrollo de la comprensión de derivada.

Los niveles de desarrollo de la comprensión de la derivada descritos en el cuadro 2 se han generado con información proporcionada desde resultados de investigaciones previas (Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014) y atienden a las relaciones entre modos de representación y el carácter local y global.

Para que los estudiantes progresen conceptualmente, es necesario que coordinen los modos de representación analítico-numérico y gráfico con carácter puntual (transición 1 en los niveles de desarrollo). Además, hay que tener en cuenta que el significado de la velocidad de cambio puede estar referido a un punto $x = a$ (carácter puntual), o a un intervalo $[a, b]$ (carácter global). La segunda transición se da cuando los estudiantes amplían el significado de derivada en un punto al considerar la relación entre la función y su función derivada (coordinan los modos de representación con carácter global).

ACTIVIDADES PARA APOYAR EL DESARROLLO CONCEPTUAL DEL CONCEPTO DE DERIVADA

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato, subraya el papel del docente en el sentido en que este debe plantear tareas que posibiliten a los estudiantes el progreso conceptual a partir de la resolución de problemas y de la aplicación de los conocimientos aprendidos.

A modo de ejemplo, indicaremos posibles tareas para fomentar las transiciones descritas en los niveles de desarrollo de la comprensión descritos en la imagen 2. En el cuadro 3 (p. 44) se presentan dos tareas cuya resolución permite usar el contexto gráfico (tarea 2) y el significado analítico en el contexto gráfico (tarea 1), lo que favorece la coordinación entre ambos modos de representación (transición 1). En la tarea 1 se da la expresión analítica de una función f y se pide la tasa de variación media (TVM) en un intervalo y su relación con la pendiente de la recta secante, así como su paso al límite (TVI). En la tarea 2, se presenta la gráfica de una función f. Se pide el valor de f en $x = 5$ y de en $x = 5$ (la pendiente de la recta tangente en $x = 5$).

La siguiente transición en el desarrollo conceptual se da cuando los estudiantes amplían el sig-

Modo: analítico
Elementos matemáticos: TVM, TVI, $f(a)$ = TVI en $x = a$
f derivable/diferenciable en $x = a \rightarrow$ continua en $x = a$
existencia e igualdad de los límites laterales en $x = a$ (f derivable en $x = a$)

Modo analítico-numérico, aproximación gráfica (derivada de una función en un punto)

Modo analítico-numérico, aproximación gráfica (derivad de una función en un punto)
Elementos matemáticos: TVM, TVI, $f'(a)$ = TVI en $x = a$
existencia e igualdad de los límites laterales en $x = a$ (f derivable en $x = a$)
derivable/diferenciable en $x = a \rightarrow f$ continua en $x = a$ (gráfico)
existencia e igualdad de los límites laterales en $x = a$ (f derivable en $x = a$) (gráfico)
f' (a) = pendiente de la recta tangente a f en $x = a$

Modo gráfico (derivada de una función)

Modo analítico-numérico, aproximación gráfica (derivad de una función)
Elementos matemáticos: TVM = pendiente de la recta secante, TVI, $f'(a)$ = TVI en $x = a$
existencia e igualdad de los límites laterales en $x = a$ (f derivable en $x = a$)
f derivable/diferenciable en $x = a \rightarrow f$ continua en $x = a$ (gráfico)
existencia e igualdad de los límites laterales en $x = a$ (f derivable en $x = a$) (gráfico)
f (a) = pendiente de la recta tangente a f en $x = a$
si $x = a$ es un punto de inflexión de la función $f \rightarrow f(a) = 0$
punto cúspide
si f es creciente $\rightarrow f' > 0$, si f es decreciente $\rightarrow f' < 0$

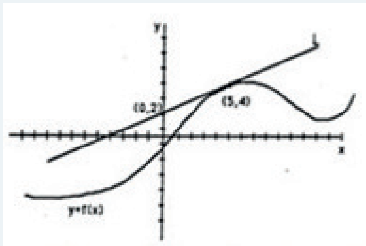
Cuadro 2. Niveles de desarrollo de la comprensión en una trayectoria de aprendizaje de la derivada para primero de bachillerato

Tarea 1

Comprueba que la tasa de variación media de $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ en el intervalo [1, 2] es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(1, f(1))$ y $Q(2, f(2))$. ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto $(1, f(1))$?

Tarea 2

Sea la gráfica



Supón que la línea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (5, 4), como se muestra en la figura. Encontrar f (5) y f' (5). Explica cómo llegas a la respuesta.

Cuadro 3. Tareas que ayudan a la coordinación entre el modo de representación analítico-numérico y gráfico (transición 1)

Tarea 3

Analiza las gráficas siguientes:

¿Cuántas parejas producirías de cada función con su derivada?

Tarea 4

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

- h es continua
- $h(0) = 2$
- $h'(3) = 0$
- $\lim_{h \to 0} h'(x) = \infty$
- $h'(x) > 0$ cuando $-4 < x < -2$ y cuando $-2 < x < 3$
- $h'(x) < 0$ cuando $x < -4$ y cuando $x > 3$
- $h''(x) < 0$ cuando $x < -4$, cuando $-4 < x < -2$ y cuando $0 < x < 5$
- $h''(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y cuando $x > 5$
- $\lim_{h \to 0} h(x) = \infty$
- $\lim_{h \to 0} h(x) = -2$

Cuadro 4. Tareas para apoyar la ampliación del significado de derivada en un punto a considerar la relación entre la función y su función derivada (transición 2) nificado puntual de la derivada a su significado global, es decir, la relación entre la función y su derivada en un intervalo. La resolución de tareas como las que aparecen en el cuadro 4 (tareas 3 y 4) creará el contexto propicio para esta transición (transición 2), a través del estableciendo de relaciones en la interpretación gráfica de la derivada o entre los modos analítico y gráfico.

En la tarea 3 se pide emparejar gráficas de funciones con las de su derivada.

En la tarea 4 se da información en modo analítico sobre una función y sus derivadas primera y segunda, y se pide esbozar la gráfica de la función. Las funciones particulares que usemos y sus características, como la existencia de puntos angulosos o cúspide (tarea 4), o la existencia de una tangente vertical y la supresión de la condición previa de continuidad, propiciarán la consolidación del conocimiento construido por el estudiante sobre la derivada hasta este momento, al enfatizar la coordinación necesaria de los modos gráfico y analítico con carácter puntual y global.

En la organización de esta secuencia de actividades, el uso del Geogebra como recurso informático para resolver diferentes tipos de tareas puede ser de gran utilidad; en particular, al facilitar a los estudiantes la coordinación entre los modos de representación.

COMENTARIOS FINALES

El diseño, el análisis y la evaluación de tareas que apoyen el desarrollo conceptual de los estudiantes, considerando un organizador niveles de desarrollo de la comprensión como parte constituyente de la idea de trayectoria de aprendizaje, son tareas fundamentales en la labor del profesor. La idea que proponemos es pensar en la secuenciación de las tareas, no desde la lógica de la organización matemática, sino desde la lógica del aprendizaje de los estudiantes. Este cambio de perspectiva sobre la planificación de la enseñanza genera retos en la actividad del profesor. ◂

Nota

* Agradecimientos: Este trabajo ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias bibliográficas

CLEMENTS, D.; SARAMA, J. (2004): «Learning trajectories in mathematics education». *Mathematical Thinking and Learning,* vol. 6(2), pp. 81-89.

HABRE, S.; ABBOUD, M. (2006): «Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course». *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 25, pp. 57-72.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S. (2014): «Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept». *International Journal of Science and Mathematics Education,* vol. 13(6), pp. 1305-1329.

Direcciones de contacto

Gloria Sánchez-Matamoros García
Universidad de Sevilla
gsanchezmatamoros@us.es

Ceneida Fernández Verdú
Universidad de Alicante
ceneida.fernandez@ua.es

Este artículo fue solicitado por Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas en octubre de 2015 y aceptado en febrero de 2016 para su publicación.